

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Указаны достаточные условия эквиограниченности и квазиэквиограниченности в пределе решений сингулярно возмущенных систем. При этом используется связь между решениями возмущенной и вырожденной систем.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, дифференциальные уравнения, вырожденная система, ограниченность решений, устойчивость.

Abstract. The article describes sufficient conditions for boundedness of solutions of singularly perturbed systems. The authors use the relationship between the solutions of the perturbed and singular systems.

Key words: singularly perturbed system, differential equations, degenerate system, boundedness of the solutions, stability.

Введение

В статье [1] указаны достаточные условия равномерной ограниченности решений квазилинейных сингулярно возмущенных систем. В настоящей работе проводится исследование решений сингулярно возмущенных систем общего вида на эквиограниченность и квазиэквиограниченность в пределе.

Прежде чем переходить к изложению основного содержания работы, приведем определения указанных типов ограниченности решений систем дифференциальных уравнений.

Определение [2]. Решения системы

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x \in R^n, \quad t \in R,$$

называются

– эквиограниченными, если для любых $\alpha > 0$ и t^0 можно найти число $\beta = \beta(\alpha, t^0) > 0$ такое, что из условия $\|x^0\| < \alpha$ следует $\|x(t, t^0, x^0)\| < \beta$ при $t > t^0$;

– квазиэквиограниченными в пределе, если для любых $\alpha > 0$ и t^0 можно найти числа $B > 0$ и $T = T(\alpha, t^0) > 0$ такие, что $\|x(t, t^0, x^0)\| < B$ при $\|x^0\| < \alpha$ и $t > t^0 + T$.

1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, z), \\ \mu \frac{dz}{dt} = h(t, y, z), \end{cases} \quad (1)$$

в которой $y = (y_1, \dots, y_k)^T$, $z = (z_1, \dots, z_m)^T$, $\mu > 0$.

Предполагается, что правая часть системы (1) допускает существование и единственность решения задачи Коши для любых начальных условий $y(t^0, \mu) = y^0$, $z(t^0, \mu) = z^0$. Это решение обозначим через $y(t, \mu)$, $z(t, \mu)$.

Рассмотрим вырожденную систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, z), \\ 0 = h(t, y, z). \end{cases}$$

Предположим, что уравнение $h(t, y, z) = 0$ имеет один корень $z = \psi(t, y)$. Причем функция $\psi(t, y)$ ограничена. Тогда вырожденная система переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, \psi(t, y)), \\ z = \psi(t, y). \end{cases} \quad (2)$$

Начальные данные для дифференциальной подсистемы системы (2) остаются теми же, т.е. $y(t^0) = y^0$. Решение системы (2) будем обозначать как $y(t)$, $z(t)$. Функция $z(t)$ в начальный момент t^0 может принимать значения, отличные от z^0 .

В работе А. Н. Тихонова [3] исследовалась связь между решениями систем (1) и (2). При этом были получены достаточные условия, при которых $\{y(t, \mu), z(t, \mu)\}$ неограниченно приближается к $\{y(t), z(t)\}$ при стремлении возмущающего параметра μ к нулю. В настоящей статье такая связь используется для установления достаточных условий, при выполнении которых решения возмущенной системы (1) наследуют ограниченность от решений системы (2) при $\mu > 0$.

Пусть корень $z = \psi(t, y)$ устойчив, по терминологии А. Н. Тихонова [3]. Для детального разъяснения этой ситуации рассмотрим следующую начальную задачу:

$$\frac{dz}{d\tau} = h(t^0, y^0, z), \quad z(0) = z^0. \quad (3)$$

Точка $z_0 = \psi(t^0, y^0)$, очевидно, является положением равновесия системы (3). Корень $z = \psi(t, y)$ называется устойчивым в некоторой области D пространства (t, y) , если найдется такое $\varepsilon > 0$, что при любом выборе $(t^0, y^0) \in D$ и $z^0: \|z^0 - \psi(t^0, y^0)\| < \varepsilon$ решение начальной задачи (3) $z(\tau)$ стремится при $\tau \rightarrow +\infty$ к положению равновесия $z_0 = \psi(t^0, y^0)$. Совокупность всех таких точек (t^0, y^0, z^0) , для которых решение задачи (3) стремится

ся к $z_0 = \psi(t^0, y^0)$, называется областью влияния корня $z = \psi(t, y)$. Здесь и далее будем предполагать, что область устойчивости D бесконечна по измерению t .

Теорема 1. Если начальная точка (t^0, y^0, z^0) принадлежит области влияния устойчивого корня $z = \psi(t, y)$, а решение вырожденной системы (2) с начальными данными $y(t^0) = y^0$ ограничено, то решение исходной системы (1), определенное начальными данными $y(t^0, \mu) = y^0$, $z(t^0, \mu) = z^0$, также ограничено при всех достаточно малых $\mu > 0$.

Доказательство. Если точка (t^0, y^0, z^0) принадлежит области влияния устойчивого корня $z = \psi(t, y)$, то согласно теореме А. Н. Тихонова [3] имеет место равномерный в области $t \geq t_1 > t^0$ предельный переход

$$\lim_{\mu \rightarrow +0} y(t, \mu) = y(t), \quad \lim_{\mu \rightarrow +0} z(t, \mu) = z(t). \quad (4)$$

Это означает, что для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при $\mu < \delta$ для всех $t \geq t_1$ выполняются неравенства:

$$\|y(t, \mu) - y(t)\| < \varepsilon, \quad \|z(t, \mu) - z(t)\| < \varepsilon. \quad (5)$$

По условию теоремы $\|y(t)\| \leq a$ и $\|z(t)\| \leq b$. Тогда из неравенств (5) следует

$$\|y(t, \mu)\| < a + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < b + \varepsilon. \quad (6)$$

Теорема доказана.

Упомянутые в доказательстве величины $\delta > 0$ и t_1 на самом деле зависят от начальных данных (t^0, y^0, z^0) , т.е. представляют собой функции $\delta = \delta(\varepsilon, t^0, y^0, z^0)$ и $t_1 = t_1(t^0, y^0, z^0)$. Нижняя грань функции $\delta = \delta(\varepsilon, t^0, y^0, z^0)$ на всем пространстве R^{1+k+m} при фиксированном ε может быть равна нулю. Однако на компакте

$$E_\alpha = \left\{ (y^0, z^0) : \|y^0\|^2 + \|z^0\|^2 \leq \alpha^2 \right\}$$

при фиксированных значениях ε и t^0 нижняя грань отлична от нуля

$$\inf_{E_\alpha} \delta(\varepsilon, t^0, y^0, z^0) = \mu_0 > 0.$$

Функция $t_1(t^0, y^0, z^0)$ при фиксированном t^0 может быть неограниченной, но на компакте E_α ее значения ограничены:

$$\sup_{E_\alpha} t_1(t^0, y^0, z^0) = t^1 < +\infty.$$

Теорема 1 утверждает, что при выполнении определенных условий решения исходной системы (1) наследуют свойство ограниченности от решений вырожденной системы (2). Чтобы иметь возможность оценивать решения системы (1) с произвольными начальными данными (t^0, y^0, z^0) , достаточно потребовать, чтобы область устойчивости D совпадала со всем пространством (t, y) , а положение равновесия $z_0 = \psi(t^0, y^0)$ системы (3) было асимптотически устойчивым в целом. Последнее означает, что решение задачи (3) $z(\tau)$ стремится при $\tau \rightarrow +\infty$ к точке $z_0 = \psi(t^0, y^0)$ при любых начальных данных $z(0) = z^0$. В рамках этих требований получим следующее утверждение.

Теорема 2. При всех достаточно малых $\mu > 0$ справедливы утверждения:

- 1) если решения системы (2) эквиограничены, то решения системы (1) эквиограничены;
- 2) если решения системы (2) квазиэквиограничены в пределе, то решения системы (1) квазиэквиограничены в пределе.

Доказательство. Зафиксируем начальный момент t^0 .

1. Эквиограниченность решений системы (2) означает, что для любого $\alpha > 0$ найдется число $\beta = \beta(\alpha, t^0) > 0$ такое, что из $\|y^0\| < \alpha$ следует

$$\|y(t)\| < \beta, \quad \|z(t)\| < \beta.$$

Тогда в неравенствах (6) $a = b = \beta$, следовательно

$$\|y(t, \mu)\| < \beta + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < \beta + \varepsilon, \quad (7)$$

причем эти неравенства выполняются при всех $\mu < \mu_0$ и $t \geq t^1 > t^0$.

2. Зафиксируем произвольное $\alpha > 0$. Квазиэквиограниченность в пределе означает, что существуют числа $B > 0$ и $T = T(\alpha, t^0) > 0$ такие, что

$$\|y(t)\| < B, \quad \|z(t)\| < B$$

при $\|y^0\| < \alpha$ и $t > t^0 + T$.

Неравенства (6) при $(y^0, z^0) \in E_\alpha$ и $t > t^2 > t^0$ примут вид

$$\|y(t, \mu)\| < B + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < B + \varepsilon. \quad (8)$$

При этом $t^2 = \max\{t^1, t^0 + T\}$.

Теорема доказана.

2. Теперь рассмотрим случай, когда уравнение $h(t, y, z) = 0$ имеет n корней $z_i = \psi_i(t, y)$ ($i = \overline{1, n}$) и все они ограничены. Каждому корню $z_i = \psi_i(t, y)$ будет соответствовать своя вырожденная система:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, \psi_i(t, y)), \\ z = \psi_i(t, y). \end{cases} \quad (9)$$

Система (3) будет иметь n положений равновесия, каждое из которых имеет свою область влияния. Для сохранения связи между решениями возмущенной системы (1) и вырожденной системы (2) достаточно потребовать, чтобы, во-первых, каждый из корней $z_i = \psi_i(t, y)$ ($i = \overline{1, n}$) был устойчив и область его устойчивости D_i совпадала со всем пространством (t, y) . Во-вторых, потребуем, чтобы объединение областей влияния положений равновесия системы (3) совпадало со всем пространством R^m . Второе требование означает, что начальное значение z^0 в задаче (3) так или иначе попадет в область влияния одного из положений равновесия и решение $z(\tau)$, выходящее из z^0 , будет к нему стремиться при $\tau \rightarrow +\infty$. Если эти требования выполнены, то получим следующее утверждение.

Теорема 3. При всех достаточно малых $\mu > 0$ справедливы утверждения:

- 1) если решения систем (9) ограничены, то решения системы (1) ограничены;
- 2) если решения систем (9) эквиограничены, то решения системы (1) эквиограничены;
- 3) если решения систем (9) квазиэквиограничены в пределе, то решения системы (1) квазиэквиограничены в пределе.

Доказательство.

1. Рассмотрим решение системы (1), выходящее из точки (t^0, y^0, z^0) , и зафиксируем произвольным образом $\varepsilon > 0$. В силу поставленных выше требований начальная точка попадет в область влияния какого-либо корня $z_j = \psi_j(t, y)$. Тогда найдутся $\delta_j = \delta_j(\varepsilon, t^0, y^0, z^0) > 0$ и $t_{1,j} = t_{1,j}(t^0, y^0, z^0) > t^0$ такие, что при $\mu < \delta_j$ и $t \geq t_{1,j}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|y(t, \mu)\| &< \|y_j(t)\| + \varepsilon, \\ \|z(t, \mu)\| &< \|z_j(t)\| + \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

где $y_j(t)$ и $z_j(t)$ – решения вырожденной системы

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y, \Psi_j(t, y)), \\ z = \Psi_j(t, y), \end{cases} \quad (11)$$

с начальными данными $y(t^0) = y^0$.

По условию теоремы решения системы (11) ограничены, т.е. $\|y_j(t)\| \leq a$, $\|z_j(t)\| \leq b$. Тогда решение системы (1), выходящее из точки (t^0, y^0, z^0) , также ограничено при $\mu < \delta_j$:

$$\|y(t, \mu)\| < a + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < b + \varepsilon. \quad (12)$$

2. Зафиксируем t^0 и $\varepsilon > 0$. Второе условие теоремы означает, что для любого $\alpha > 0$ найдутся $\beta_i = \beta_i(\alpha) > 0$ ($i = \overline{1, n}$) такие, что из условия $\|y^0\| < \alpha$ следует

$$\|y_i(t)\| < \beta_i, \quad \|z_i(t)\| < \beta_i, \quad (13)$$

где $y_i(t)$, $z_i(t)$ – решения системы (9). Обозначим $\beta = \max_i \{\beta_i\}$.

Рассмотрим решения системы (1), выходящие из точки (t^0, y^0, z^0) . Если точка (t^0, y^0, z^0) принадлежит области влияния корня $z_j = \Psi_j(t, y)$, то согласно предыдущему пункту доказательства справедливы неравенства (10). Обозначим $\delta_j^0 = \inf_{E_\alpha} \delta_j(\varepsilon, t^0, y^0, z^0) > 0$ и $t_j^1 = \sup_{E_\alpha} t_{1,j}(t^0, y^0, z^0) < +\infty$. Тогда для всех решений системы (1) с начальными данными $(y^0, z^0) \in E_\alpha$, попадающими в область влияния корня $z_j = \Psi_j(t, y)$, при $\mu < \delta_j^0$ и $t \geq t_j^1$ выполняются неравенства (10). Обозначим теперь $\mu_0 = \min_j \{\delta_j^0\}$, $t^1 = \max_j \{t_j^1\}$. Тогда в силу соотношений (13) для всех решений системы (1) с начальными данными $(y^0, z^0) \in E_\alpha$ справедливы неравенства

$$\|y(t, \mu)\| < \beta + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < \beta + \varepsilon \quad (14)$$

при $t \geq t^1$ и $\mu < \mu_0$.

3. Зафиксируем t^0 , $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$. По третьему условию теоремы существуют числа $B, T > 0$ такие, что при $\|y^0\| < \alpha$ и $t > t^0 + T$ выполняются неравенства

$$\|y(t)\| < B, \quad \|z(t)\| < B. \quad (15)$$

Если точка (t^0, y^0, z^0) принадлежит области влияния корня $z_j = \psi_j(t, y)$, то справедливы неравенства (10). Пусть

$$\mu_0 = \min_j \sup_{E_\alpha} \delta_j(\varepsilon, t^0, y^0, z^0) > 0,$$

$$t^1 = \max_j \inf_{E_\alpha} t_{1,j}(t^0, y^0, z^0) < +\infty, \quad t^2 = \max\{t^0 + T, t^1\},$$

тогда с учетом (15) можно записать

$$\|y(t, \mu)\| < B + \varepsilon, \quad \|z(t, \mu)\| < B + \varepsilon$$

при всех $t > t^2$ и $\mu < \mu_0$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. **Козлов, М. В.** Равномерная ограниченность сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений / М. В. Козлов, В. Н. Щенников // Вестник Мордовского университета. Серия «Физико-математические науки». – 2010. – № 4. – С. 56–59.
2. **Йосидзава, Т.** Функция Ляпунова и ограниченность решений / Т. Йосидзава // Математика : сб. переводов. – М. : Мир, 1955. – С. 95–127.
3. **Тихонов, А. Н.** О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры / А. Н. Тихонов // Математический сборник. – 1950. – Т. 27 (69), № 1. – С. 147–156.

Козлов Михаил Владимирович

магистрант, Мордовский
государственный университет
имени Н. П. Огарева (г. Саранск)

E-mail: mhl1988@yandex.ru

Kozlov Mikhail Vladimirovich

graduate student, Mordovia State University
named after N. P. Ogaryov (Saransk)

Щенников Владимир Николаевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
дифференциальных уравнений,
Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева
(г. Саранск)

E-mail: mhl1988@yandex.ru

Shchennikov Vladimir Nikolayevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of differential equations, Mordovia
State University named after N. P. Ogaryov
(Saransk).

УДК 517.928.4

Козлов, М. В.

Ограниченность решений систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений / М. В. Козлов, В. Н. Щенников // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 36–42.